

Varianta 22

Subiectul I

- a) $\bar{z} = -2007i$.
- b) $S_{ABC} = 24$.
- c) $a = \frac{3}{4}, b = -6$.
- d) $\operatorname{Re}(z) = 5$.
- e) $\sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- f) $\cos M = \frac{19}{35}$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $x_1 = 1$ și $x_2 = -2$.
- b) $P_3 = 3! = 6$.
- c) $\log_2 3 + \log_2 \frac{8}{3} = 3$.
- d) $C_4^3 - A_3^1 = 1$.

e) $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

2.

- a) $f(-x) = -f(x)$.
- b) $f'(x) = 2007x^{2006} + 1$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$.
- d) Din b) rezultă că $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow$ funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.
- e) $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$.

Subiectul III

- a) $I_2 = A(1), 1 > 0$. Deci $I_2 \in M$.
- b) $\det(A(2)) = 2$.
- c) $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ xy-1 & xy \end{pmatrix} = A(xy)$.

- d)** $A(x) = A(y) \Rightarrow x - 1 = y - 1$ și $x = y$. Deci $x = y$.
- e)** $A(x) \cdot A(e) = A(x)$. Din **c)** rezultă $A(xe) = A(x)$. Folosind **d)** rezultă $xe = x, \forall x > 0$. Obținem $e = 1 > 0$. Deci $A(e) = A(1) \in M$.
- f)** $A(x) \cdot A(x') = A(1)$. Din **c)** rezultă $A(xx') = A(1)$. Folosind **d)** rezultă $xx' = 1$. Cum $x > 0$, obținem că există $x' = \frac{1}{x} > 0$. Deci $A(x') = A\left(\frac{1}{x}\right) \in M$.
- g)** Din punctul **c)** rezultă că $A^2(x) = A(x^2)$. Prin inducție matematică se arată că $A^n(x) = A(x^n)$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Atunci $A^n(2) = A(2^n)$. Obținem $\sum_{k=1}^n A^k(2) = \sum_{k=1}^n A(2^k) =$
 $= \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^k - 1 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 2^{n+1} - 2 - n & 2^{n+1} - 2 \end{pmatrix}.$

Subiectul IV

- a)** $f(0) = 0$ și $g(0) = 0$.
- b)** $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}, \forall x \in \mathbf{R}$.
- c)** $g'(x) = 2f(x), \forall x \in \mathbf{R}$.
- d)** $y = 0$ este asimptotă spre $-\infty$.
- e)** $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Din tabelul de variație obținem punctele de extrem local de coordonate $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ și $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.
- f)** Dacă $x \leq 0$ atunci $\frac{x}{1 + x^2} \leq 0$, deci $f(x) \leq 0, \forall x \leq 0$.
 $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1 + x^2) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1 + x^2) \geq \ln 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$ adevărat, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- g)** Din $f(x) \leq 0 \leq g(x), \forall x \leq 0$ obținem $f(x) \leq g(x), \forall x \leq 0$, adică
 $\frac{x}{1 + x^2} \leq \ln(1 + x^2), \forall x \leq 0$.